

전송선로용 테브넡 정리의 파동 해석적 증명

조 용 희*

A Wave-Analytical Proof of Thévenin's Theorem for Transmission Lines

Yong Heui Cho*

요 약

전송선로용 테브넡의 정리를 파동 해석적으로 증명하기 위해, 전원 및 부하 임피던스의 불연속으로 발생하는 반사와 공식화를 활용해서 테브넡 전압원과 등가 임피던스를 도출했다. 이 접근법은 전송선을 통해 전원부 회로망을 부하 방향으로 변환할 때 강점이 있고, 전체 시스템의 해석적 표현을 단순화한다. 종속 접속된 전송선로에 테브넡 등가 회로를 적용함으로써 선로를 따라 존재하는 전압 분포를 특징짓는 엄밀한 공식을 유도하고, 수치 계산을 통해 이 공식화의 명확성을 검증하였다.

Abstract

To provide a wave-analytical proof of Thévenin's theorem for transmission lines, the Thévenin voltage source and equivalent impedance were established by utilizing reflection wave formulations associated with discontinuities in the source and load impedances. This approach is advantageous for transforming the source-side network through the transmission line toward the load, thereby simplifying the analytical representation of the entire system. By applying the Thévenin equivalent circuit to cascaded transmission lines, a rigorous formula was derived to characterize the voltage distribution along the line and the validity of this formulation was verified through numerical computations.

Keywords

Thévenin's theorem, transmission line theory, wave analysis, Thévenin equivalent circuit, input impedance, cascaded transmission lines

1. 서 론

회로 분석에 자주 사용하는 테브넡의 정리(Thévenin's theorem)는 전송선 이론까지 확장될 수 있다[1]. 신호 파장에 비해 다상(Polyphase) 교류 전송선로의 길이는 무시할 수 없기 때문에 기존 회로망 개념을 전송선을 고려한 테브넡의 정리로 일반

화해야 한다. 현재까지 전송선로용 테브넡의 정리를 다루는 관점은 회로 이론 중심이다[2][3]. 전송선 이론의 전송선 방정식(Transmission line equation)은 단위 길이당 R , L , G , C 로 유도하므로, 회로 이론에 성립하는 테브넡의 정리도 전송선 이론에 적용 가능하다는 정성적인 설명이 주류를 이룬다. 하지만 전압파와 전류파가 존재하는 전송선에 쓰이는 테브

* 목원대학교 게임소프트웨어공학과 교수
 - ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4618-8574>

· Received: Mar. 03, 2026, Revised: Mar. 25, 2026, Accepted: Mar. 28, 2026
 · Corresponding Author: Yong Heui Cho
 Dept. of Game SW Eng., Mokwon University, 88 Doanbuk-ro, Seo-gu, Daejeon, Korea
 Tel.: +82-42-829-7675, Email: yhcho@mokwon.ac.kr

넨의 정리는 파동 이론을 바탕으로 정확히 유도할 필요가 있다. 본 논문에서는 전압파에 의한 전원 및 부하의 반사를 다층적으로 표현하는 전압 정재파의 방정식을 시작점으로 테브넨 등가 회로에 필요한 테브넨 전압원(Thévenin voltage source)과 테브넨 등가 임피던스(Thévenin equivalent impedance)를 유도한다. 전송선로용 테브넨 정리의 유용성을 확인하기 위해 종속 접속된 전송선로(Cascaded transmission lines)에 존재하는 전압과 전류의 공식을 유도하고 수치 해석으로 제안한 접근법의 명확성을 검증한다. 전송선로용 테브넨 정리는 임피던스 정합[4], 다중 전송선로 등의 해석에 유용할 것이다.

II. 전송선로용 테브넨의 정리

전송선 이론에 사용할 수 있는 테브넨의 정리를 파동 해석적으로 증명하기 위해, 전송선로에 존재하는 전압파(Voltage wave)의 입사와 반사로부터 테브넨 등가 회로를 엄밀하게 유도한다.

그림 1은 전형적인 전압원과 부하를 가진 전송선로 구조를 보여준다. 전송선 이론에 사용하는 시간 약속(Time convention)은 $e^{j\omega t}$ 이다.

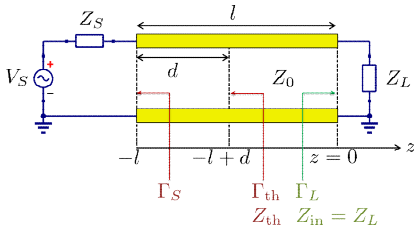


그림 1. 전압원과 부하를 가진 전송선로의 구조

Fig. 1. Structure of a transmission line with a voltage source and a load

선로 위치 $z = -l$ 에서 0 사이에 있는 전압 정재파(Voltage standing wave) $V(z)$ 를 전방파(Forward wave)와 후방파(Backward wave)의 합인 식 (1)로 공식화한다.

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (1)$$

여기서 β 는 파동의 위상 상수(Phase constant), V_0^+ 와 V_0^- 는 각각 전방파와 후방파의 진폭 계수이다. 부하 및 전원에서의 반사도를 각각 Γ_L 과 Γ_S 로 두

면, $z=0$ 과 $-l$ 에 적용되는 전압과 전류의 연속 조건으로부터 $V_0^\pm$ 를 결정해 식 (2)처럼 합친다[5].

$$V(z) = \frac{Z_0 V_S e^{-j\beta l}}{1 - \Gamma_S \Gamma_L e^{-j2\beta l}} \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}}{Z_S + Z_0} \quad (2)$$

여기서 Z_0 은 특성 임피던스(Characteristic impedance)이다. 전원 및 부하 반사도는 식 (3)으로 정한다.

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0}, \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (3)$$

여기서 Z_0 은 전송선의 특성 임피던스(Characteristic impedance)이다. 지금부터는 잘 알려진 식 (2)를 파동적으로 분해하여 전송선로용 테브넨의 정리를 엄밀히 유도한다. 다음 절차로 전원에서 부하로 d 만큼 이동한 $z = -l + d$ 에서 테브넨 등가 회로를 정의할 목적으로, 부하에서 전원을 바라본 테브넨 반사도 $\Gamma_{th} = \Gamma_S e^{-j2\beta d}$ 를 도입한다. 이를 식 (2)에 대입함으로써 전원 반사도 Γ_S 를 테브넨 등가 회로가 정의되는 $z = -l + d$ 의 Γ_{th} 로 교체한 식 (4)로 만든다.

$$V(z) = \frac{(e^{-j\beta d} - \Gamma_{th} e^{j\beta d}) e^{-j\beta(l-d)}}{1 - \Gamma_{th} \Gamma_L e^{-j2\beta(l-d)}} \times \frac{V_S}{2} (e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}) \quad (4)$$

식 (4)의 분자에 나온 위상 항의 물리적 의미를 얻고자 식 (5)처럼 반사도 대신 임피던스로 기술한다.

$$e^{-j\beta d} - \Gamma_{th} e^{j\beta d} = 2 \frac{Z_0 \cos(\beta d) - j Z_{th} \sin(\beta d)}{Z_{th} + Z_0} \quad (5)$$

$$= \frac{2 Z_0}{Z_{th} + Z_0} \frac{Z_0 \sec(\beta d)}{Z_0 + j Z_S \tan(\beta d)}$$

여기서 Z_{th} 는 그림 1처럼 Γ_{th} 에 대응하는 전원 방향으로 본 테브넨 등가 임피던스이다.

그림 2에 제시한 개방 부하(Open load)를 가진 전송선로의 전압 $V_{oc}(z)$ 와 식 (5)와의 관계식을 찾기 위해, 그림 2의 전송선로를 전압 정재파 관점에서 해석한다. 이를 통해 얻은 $z = -d$ 와 0의 전압 $V_{oc}(z)$ 를 식 (6)에 기술한다.

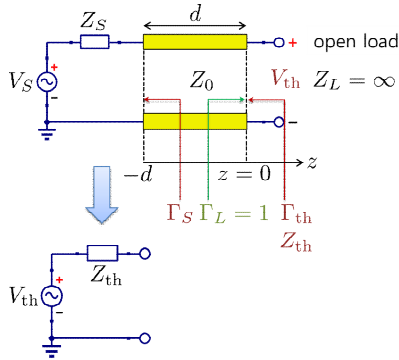


그림 2. 테브넨 등가 회로를 구성하기 위한 전송선로의 조건
Fig. 2. Condition of a transmission line to compose the Thévenin equivalent circuit

$$V_{oc}(-d) = \frac{Z_0}{Z_0 + jZ_S \tan(\beta d)} V_S \quad (6a)$$

$$V_{oc}(0) = V_{th} = \frac{V_{oc}(-d)}{\cos(\beta d)} \quad (6b)$$

여기서 개방 부하가 생성하는 정재파로 인해 $\cos(\beta d)$ 가 나타난다. 모든 결과를 종합하려고 식 (5)와 (6b)를 식 (4)에 대입해서 식 (7)로 정리한다.

$$V(z) = \frac{Z_0 V_{th} e^{-j\beta(l-d)}}{1 - \Gamma_{th} \Gamma_L e^{-j2\beta(l-d)}} \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}}{Z_{th} + Z_0} \quad (7)$$

여기서 V_{th} 는 테브넨 전압원이다. 식 (7)을 등가 회로로 가시화할 경우, 그림 1의 전원부를 그림 2의 테브넨 등가 회로 (V_{th}, Z_{th})로 바꾸고 전송선로의 길이를 $l-d$ 로 축소한 전송선로 구조가 출현한다. 그러므로 회로 이론에서 제안된 테브넨의 정리는 전송선 이론에서도 완전하게 성립한다.

III. 수치 해석

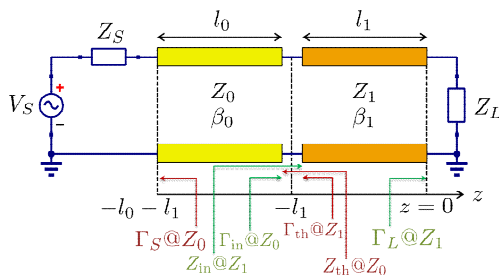


그림 3. 종속 접속된 전송선로의 구조
Fig. 3. Structure of cascaded transmission lines

전송선로용 테브넨 등가 회로의 강점을 확인할 수 있는 예시로 그림 3에 보인 종속 접속된 전송선로가 있다.

종속 접속된 전송선로의 각 위치에 생기는 전압 정재파를 입력 반사도 Γ_{in} 과 테브넨 등가 회로 (V_{th}, Z_{th})로 수식화한다. 먼저 구간 $[-l_0, -l_1]$ 사이의 전압 $V_0(z)$ 는 식 (2)에서 부하 임피던스를 Z_{in} 으로 가정하고 식 (8)과 같이 구한다.

$$V_0(z) = \frac{Z_0 V_S e^{-j\beta_0 l_0}}{1 - \Gamma_S \Gamma_{in} e^{-j2\beta_0 l_0}} \frac{e^{-j\beta_0(z+l_1)} + \Gamma_{in} e^{j\beta_0(z+l_1)}}{Z_S + Z_0} \quad (8)$$

식 (8)에 사용한 $z = -l_1$ 의 입력 반사도 Γ_{in} 에 대응하는 입력 임피던스 Z_{in} 는 식 (9)처럼 계산한다.

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_L + jZ_1 \tan(\beta_1 l_1)}{Z_1 + jZ_L \tan(\beta_1 l_1)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}} \quad (9)$$

구간 $[-l_1, 0]$ 에 발생하는 식 (10)의 전압 $V_1(z)$ 의 계산에는 식 (11)과 (12)의 테브넨 등가 회로 (V_{th}, Z_{th})가 반드시 필요하다.

$$V_1(z) = \frac{Z_1 V_{th} e^{-j\beta_1 l_1}}{1 - \Gamma_{th} \Gamma_L e^{-j2\beta_1 l_1}} \frac{e^{-j\beta_1 z} + \Gamma_L e^{j\beta_1 z}}{Z_{th} + Z_1} \quad (10)$$

$$V_{th} = \frac{Z_0 \sec(\beta_0 l_0)}{Z_0 + jZ_S \tan(\beta_0 l_0)} V_S \quad (11)$$

$$Z_{th} = Z_0 \frac{Z_S + jZ_0 \tan(\beta_0 l_0)}{Z_0 + jZ_S \tan(\beta_0 l_0)} = Z_1 \frac{1 + \Gamma_{th}}{1 - \Gamma_{th}} \quad (12)$$

그림 3의 각 전송선로 정보를 $Z_0 = 75 \Omega$, $\epsilon_{r0} = 2.2$ (테플론), $\beta_0 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r0}}$, $l_0 = 2.5 \text{ cm}$, $Z_1 = 300 \Omega$, $\epsilon_{r1} = 4.4$ (FR4), $\beta_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}$, $l_1 = 1.5 \text{ cm}$ 로 선택한 후, 식 (8)과 (10)로 전체 구간 $[-l_0, -l_1, 0]$ 에 나타나는 전압을 그림 4처럼 계산한다. 여기서 k_0 은 자유 공간의 파수, 전원부의 전압은 $V_S = 1 \text{ V}$ 및 전원 임피던스는 $Z_S = R_S + j\omega L_S$, $R_S = 50 \Omega$, $L_S = 1 \text{ nH}$ 이며, 부하는 $Z_L = R_L + \frac{1}{j\omega C_L}$, $R_L = 500 \Omega$, $C_L = 1 \text{ pF}$ 로 설정한다.

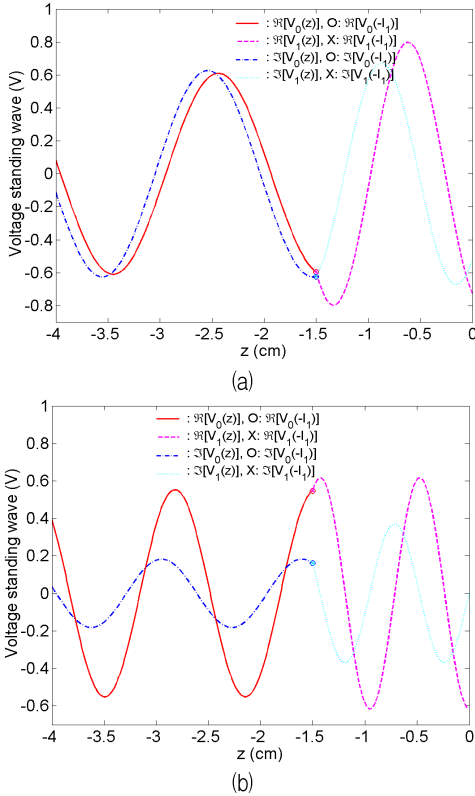


그림 4. 종속 접속된 전송선로의 전압 정재파 특성
(a) $f = 10$ GHz (b) $f = 15$ GHz
Fig. 4. Properties of voltage standing wave within cascaded transmission lines
(a) $f = 10$ GHz (b) $f = 15$ GHz

그림 4는 각 주파수에서 계산한 전원과 부하에서의 반사 및 전송선로간 반사로 발생하는 전압 정재파의 거리별 변화를 보여준다. 두 전송선로가 만나는 $z = -l_1 = -1.5$ cm에서 식 (8)와 (10)는 서로 일치하므로, 전압 $V_0(z)$ 와 $V_1(z)$ 의 연속성이 보장된다. 마찬가지로 식 (8) 및 (10)과 유사한 과정으로 구한 전류의 연속성도 항상 성립한다.

IV. 결 론

전송선 이론의 전압파에 의한 전원 및 부하 반사 공식을 이용해서, 전송선로에 사용할 수 있는 테브넨의 정리를 파동 해석적으로 엄밀히 증명하였다. 테브넨 등가 회로는 개방 선로에 유기되는 개방 회로 전압과 전원부의 전원 임피던스를 부하 방향으

로 이동시킨 테브넨 등가 임피던스로 구성된다. 전송선로용 테브넨의 정리는 전송선로의 전원부를 등가 회로로 치환할 때 유용하다.

References

- [1] G. T. Heydt, "Thévenin's theorem applied to the analysis of polyphase transmission circuits", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 32, No. 1, pp. 72-77, Feb. 2017. <https://doi.org/10.1109/TPWRD.2016.2537264>
- [2] R. E. Collin, "Foundations for Microwave Engineering", John Wiley & Sons, pp. 238-248, 2001.
- [3] A. F. Peterson and G. D. Durgin, "Transient Signals on Transmission Lines", Morgan & Claypool Publishers, pp. 49-60, 2009.
- [4] L. Weon, "Impedance matching circuit design technique for wireless power transmission", The Journal of Korean Institute of Information Technology, Vol. 23, No. 11, pp. 149-160, Nov. 2025. <https://doi.org/10.14801/jkiit.2025.23.11.149>.
- [5] D. M. Pozar, "Microwave Engineering", John Wiley & Sons, pp. 76-78, 2012.