

에너지 효율적 다차원 격자 형성 및 성능 분석

신동훈*, 박성준**

Energy-Efficient Multidimensional Lattice Formation and Performance Analysis

DongHoon Shin*, Sung-Joon Park**

이 논문은 2025년도 교육부 및 강원특별자치도의 재원으로 강원RISE센터의 지원을 받아 수행된 지역혁신중심 대학지원체계(RISE)의 결과이고(2025-RISE-10-004), 2025년도 국립강릉원주대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 수행되었음

요 약

정사각 경계를 갖는 사각 격자는 단순한 구조로 인해 이론적 해석이 용이하지만 에너지 효율 측면에서 최적이지 않다. 본 연구에서는 구형 경계를 갖는 사각 격자를 형성하는 방법을 제시하고 격자 내 심볼 개수의 변화에 따른 평균 심볼 에너지와 평균 인접 심볼 개수의 추이를 고찰한다. 또한, 격자에 존재하는 심볼 수가 무한에 수렴할 때 평균 심볼 에너지와 첨두대평균비를 이론적으로 해석함으로써 제안 기법의 점근적 성능 개선 한계를 도출한다. 결과에 따르면 구형 경계 격자는 사각 경계 격자에 비해 최대 0.345 dB의 평균 심볼 에너지 이득과 2.553 dB의 첨두대평균비 이득을 제공하며, 격자 내 심볼 수 증가에 따라 상기 이론적 최대 이득에 빠르게 수렴한다.

Abstract

The square lattice with a square boundary is not optimal in terms of energy efficiency, although its simple structure facilitates theoretical interpretation. In this study, we present a method of forming a square lattice with a spherical boundary and investigate the average symbol energy and the average number of adjacent symbols with respect to the number of symbols in the lattice. We also derive the asymptotic performance limit of the average symbol energy and the peak-to-average ratio. The results show that the spherical boundary lattice provides an average symbol energy gain of up to 0.345 dB and a peak-to-average ratio gain of up to 2.553 dB compared to the square boundary lattice, and real gains quickly approach the ideal gains by increasing the number of symbols.

Keywords

high-order modulation, square quadrature amplitude modulation, square lattice, sphere envelope, performance analysis

* 국립강릉원주대학교 전자·반도체공학부 학사과정
- ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4419-4664>
** 국립강릉원주대학교 전자·반도체공학부 교수(교신저자)
- ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4222-825X>

· Received: Sep. 30, 2025, Revised: Nov. 06, 2025, Accepted: Nov. 09, 2025
· Corresponding Author: Sung-Joon Park
Dept. of Electronic and Semiconductor Engineering, Gangneung-Wonju National University, 7 Jukheon-gil, Gangneung, Gangwon 25457, Korea
Tel.: +82-33-640-2386, Email: psj@gwnu.ac.kr

I. 서 론

고속 데이터 전송을 제공하는 고차 변조(High-order modulation) 기법은 디지털 통신 시스템에서 보편적으로 사용되고 있다. 이차원 신호 공간에서 효율적인 성상도를 찾기 위한 다양한 진폭 및 위상 결합 변조 방식이 연구되었고[1]-[6], 최근에는 사각 격자 구조를 채택하면서도 성상도의 외곽 형태가 원형에 수렴하는 성상도 형성 기법이 제시되었다[7][8].

본 연구는 선행 연구를 확장한 3차원 공간에서의 에너지 효율적 격자 형성 기법에 관한 것으로, 구형 경계를 갖는 사각 격자 생성 방법을 제시하고 격자 내 심볼 수에 따른 고유 특성을 도출함을 목표로 한다. 또한 제안 기법의 이론적 한계를 규명하기 위해 격자 내 심볼 수가 무한에 수렴할 때 근사화 방법을 적용하여 점근적 성능을 획득하고 분석한다.

II. 선행 연구

각 축에 평행한 가상의 직선 위에 2^m 개의 심볼이 균일한 간격으로 존재하는 3차원 사각 격자를 고려할 때, 전체 심볼 세트의 외형은 정육면체 형태이며 각 면은 정사각 경계를 갖게 된다. 이 때, 격자에 존재하는 총 심볼 수는 $M=2^{3m}$ 이고, 임의의 심볼 s_i 의 에너지 E_{s_i} 는 s_i 의 각 축 성분의 제곱합인 식 (1)로 주어진다.

$$E_{s_i} = \|s_i\|^2 = s_{i,x}^2 + s_{i,y}^2 + s_{i,z}^2 \quad (1)$$

일례로 $m=3$, $M=512$ 인 정사각 경계 격자를 그림 1에 나타내었다. 여기서, $s_{i,x}, s_{i,y}, s_{i,z}$

$\in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ 이고, 심볼 간 간격은 2, 격자의 중심은 원점으로 가정하였다.

한편, 정사각 경계를 갖는 사각 격자의 평균 심볼 에너지 $E_{s,sq}$ 와 평균 인접 심볼 개수 η_{sq} 는 구조적 규칙성을 활용하여 식 (2), (3)으로 구할 수 있다.

$$E_{s,sq} = M^{2/3} - 1 \quad (2)$$

$$\eta_{sq} = 6(1 - M^{-1/3}) \quad (3)$$

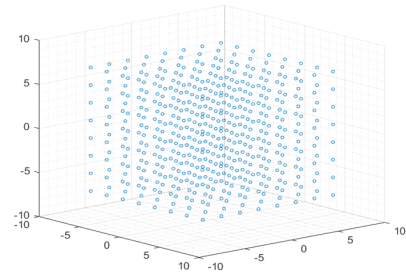


그림 1. 정사각 경계 격자, M=512

Fig. 1. Lattice with square envelope, M=512

III. 구형 경계 사각 격자

선행 연구[7]와 유사한 방법으로 (1,1,1)을 첫 번째 심볼로 선택한 후, 각 축으로의 간격이 2인 사각 격자의 교차점 중 평균 에너지를 최소화하는 기준으로 나머지 심볼을 순차적으로 선택하면 그림 2의 결과를 얻는다.

생성된 격자는 M 의 증가에 따라 급격히 구형 경계로 수렴하는데, 구형 경계 격자는 정사각 경계 격자와는 달리 M 에 따른 규칙성이 존재하지 않아 평균 심볼 에너지와 평균 인접 심볼 개수에 대한 닫힌 형태의 해를 구할 수 없다.

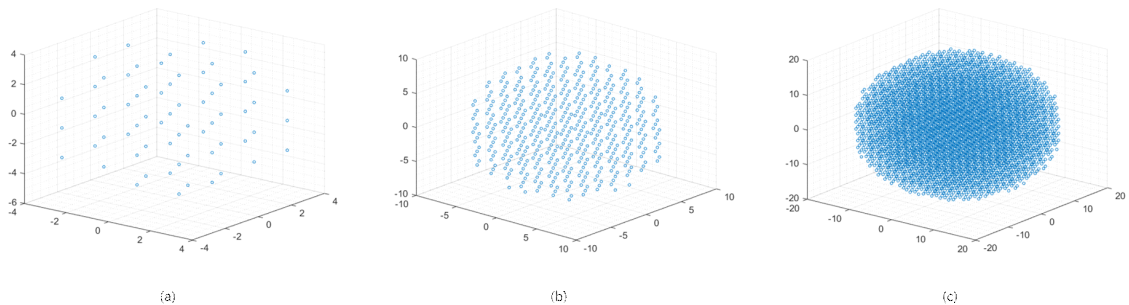


그림 2. 구형 경계 격자: (a) M=64, (b) M=512, (c) M=4096

Fig. 2. Lattice with sphere envelope: (a) M=64, (b) M=512, (c) M=4096

표 1은 산술적으로 계산한 구형 경계 격자의 평균 심볼 에너지 $E_{s,sp}$ 와 평균 인접 심볼 개수 η_{sp} 이며, 비교를 위해 정사각 경계 격자의 값들도 수록하였다. 심볼 에너지 최소화 및 구형 경계로 인해 $E_{s,sp}$ 와 η_{sp} 가 $E_{s,sq}$ 와 η_{sq} 보다 각각 더 낮음을 확인할 수 있다.

표 1. 평균 심볼 에너지와 평균 인접 심볼 개수

Table 1. Average symbol energy and average number of adjacent symbols

M	square envelope		sphere envelope		$\frac{E_{s,sq}}{E_{s,sp}}$
	$E_{s,sq}$	η_{sq}	$E_{s,sp}$	η_{sp}	
8	3	3	3	3	1
64	15	4.5	15	4.375	1
512	63	5.25	59.25	5.094	1.063
4096	255	5.625	236.515	5.545	1.078

IV. 점근적 성능 분석

4.1 평균 심볼 에너지

제안 기법의 이론적 한계 해석을 위해 근사화 기법을 도입한다. 즉, 격자 내 심볼이 충분히 많고 균일하게 분포되어 있다고 가정하면, 평균 심볼 에너지는 격자의 영역 Ψ 에 대한 이차 모멘트로 근사화할 수 있다.

$$E_s \approx \frac{1}{V(\Psi)} \int_{\Psi} \|s_i\|^2 d\psi \quad (4)$$

여기서 $V(\Psi)$ 는 Ψ 의 체적을 의미한다.

즉, 구형 경계 격자에서 격자가 형성하는 구의 반경을 R 이라고 하면, 평균 심볼 에너지는 식 (4)에 의해 다음과 같이 근사화된다.

$$E_{s,sp} \approx \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{5}R^2 \quad (5)$$

한편, 격자 내부의 각 심볼이 차지하는 단위 체

적은 $8(=2^3)$ 이므로, 영역에 존재하는 총 심볼 수는 $V(\Psi)$ 와 단위 체적의 비로 근사화할 수 있다.

$$M \approx \frac{4\pi R^3/3}{8} \quad (6)$$

식 (5)와 (6)을 병합하면 구형 경계 격자의 M 에 따른 평균 심볼 에너지 근사값을 얻는다.

$$E_{s,sp} \approx \frac{3}{5} \left(\frac{6M}{\pi} \right)^{2/3} \quad (7)$$

유사한 방법으로 정사각 경계 격자의 평균 심볼 에너지 근사값을 계산하면 식 (8)과 같다. 여기서, 각 축의 최대, 최소값은 각각 L , $-L$ 이다.

$$E_{s,sq} \approx \frac{\int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz}{(2L)^3} = L^2 \quad (8)$$

격자 내부에 존재하는 심볼 수는 $M \approx (2L)^3/8 = L^3$ 이므로, 정사각 경계 격자의 M 에 따른 평균 심볼 에너지 근사값은 식 (9)와 같다.

$$E_{s,sq} \approx M^{2/3} \quad (9)$$

최종적으로 식 (7)과 (9)를 사용하여 점근적 이득 G 를 계산하면,

$$G = \frac{E_{s,sq}}{E_{s,sp}} \approx \frac{M^{2/3}}{\frac{3}{5} \left(\frac{6M}{\pi} \right)^{2/3}} = \frac{5}{3} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{2/3} = 1.083 \quad (10)$$

식 (10)을 얻을 수 있고, 이는 0.345 dB가 된다. 상기 결과를 통해, 표 1에 수록한 $E_{s,sq}/E_{s,sp}$ 가 M 의 증가에 따라 1.083으로 수렴함을 예상할 수 있다.

4.2 침투대평균비(PAR)

정사각 경계 격자의 침투 심볼 에너지는 꼭지점

에 위치한 심볼에 의해 결정되고 꼭지점의 좌표가 $(\pm L, \pm L, \pm L)$ 이므로 첨두 심볼 에너지는 $3L^2$ 이다. 상기 첨두값과 식 (8)의 평균값에 따라, 정사각 경계 격자의 첨두대평균비는 $3(=3L^2/L^2)$ 을 얻는다. 한편, 구형 경계 격자의 첨두 심볼 에너지는 심볼이 격자 경계에 위치할 때로 R^2 이며, 구형 경계 격자의 첨두대평균비는 $5/3(=R^2/(3R^2/5))$ 가 된다. 따라서, 정사각 경계 격자의 PAR (Peak-to-Average Ratio)과 구형 경계 격자의 PAR의 비로 정의되는 PAR 이득은 $1.8(=2.553 \text{ dB})$ 임을 알 수 있다.

표 2는 M 에 따른 정사각 경계 격자의 첨두대평균비 PAR_{sq} , 구형 경계 격자의 첨두대평균비 PAR_{sp} , PAR 이득을 나타낸다. 상기 이론적 분석에 따르면, M 의 증가에 따라 PAR_{sq} 는 3, PAR_{sp} 는 $5/3$, PAR 이득은 2.553 dB 에 수렴할 것으로 예측된다.

표 2. 첨두대평균비
Table 2. Peak-to-average ratio

M	PAR_{sq}	PAR_{sp}	PAR gain [dB]
8	1	1	0
64	1.8	1.8	0
512	2.333	1.671	1.449
4096	2.647	1.670	2.000

V. 결 론

본 연구에서는 구형 경계를 갖는 다차원 사각 격자를 형성하는 방법을 제시하였고 격자 내부의 심볼 수에 따른 평균 심볼 에너지와 첨두대평균비를 도출하였다. 또한, 격자 내 심볼 수가 충분히 클 때 평균 심볼 에너지 이득은 0.345 dB , 첨두대평균비 이득은 2.553 dB 로 수렴함을 이론적으로 해석하고 검증하였다. 향후 본 연구 결과를 기반으로 구형 경계 사각 격자의 효율적인 비트열-심볼 매핑 기법에 관한 연구와 비균일 격자 형성 및 활용 연구가 수행될 예정이다.

References

[1] C. Campopiano and B. Glazer, "A coherent digital

amplitude and phase modulation scheme", IEEE Transactions on Communications, Vol. 10, No. 1, pp. 90-95, Mar. 1962. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1962.1088634>.

[2] G. Foschini, R. Gitlin, and S. Weinstein, "Optimization of two-dimensional signal constellations in the presence of Gaussian noise", IEEE Transactions on Communications, Vol. 22, No. 1, pp. 28-38, Jan. 1974. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1960.1097638>.

[3] G. Forney, et al., "Efficient modulation for band-limited channels", IEEE Journal of Selected Areas Communications, Vol. 2, No. 5, pp. 632-647, 1984. <https://doi.org/10.1109/JSAC.1984.1146101>.

[4] S.-J. Park, "Triangular quadrature amplitude modulation", IEEE Communications Letters, Vol. 11, No. 4, pp. 292-294, Apr. 2007. <https://doi.org/10.1109/LCOM.2007.348278>.

[5] S. Kim, "An Euclidean distance-based power allocation algorithm with reduced complexity for quadrature spatial modulation systems", Journal of KIIT, Vol. 17, No. 10, pp. 33-39, Oct. 2019. <https://doi.org/10.14801/jkiit.2019.17.10.33>.

[6] P. K. Singya, et al., "A survey on high-order QAM constellations: technical challenges, recent advances, and future trends", IEEE Open Journal of the Communications Society, Vol. 2, pp. 617-655, Mar. 2021. <https://doi.org/10.1109/OJCOMS.2021.3067384>.

[7] M. Seong and S.-J. Park, "Quadrature amplitude modulation with circular boundary", Journal of KICS, Vol. 47, No. 6, pp. 801-806, Jun. 2024. <https://doi.org/10.7840/kics.2024.49.6.801>.

[8] M. Seong and S.-J. Park, "A study on bits-to-symbol mapping and channel capacity of circular square quadrature amplitude modulation", Journal of KIIT, Vol. 22, No. 12, pp. 119-126, Dec. 2024. <https://dx.doi.org/10.14801/jkiit.2024.22.12.119>.